1982

DELEGATION GENERALE POUR L'ARMEMENT

CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE NATIONALE DES INGENIEURS DES ETUDES ET TECHNIQUES D'ARMEMENT

MATHEMATIQUES

1ère épreuve commune aux 3 options M, P et TA

Durée : 4 heures

Sauf dans la question 4a, le réel n est différent de zéro, a^2 est le carré du réel a strictement positif.

1°/ - On appelle f_n l'application de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$

$$x \xrightarrow{f_n} f_n(x) = \left(\sqrt{a^2 + x^2} + x\right)^n \qquad n \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

a) Construire le graphe de f_1.

b) Trouver des équivalents de $f_n(x)$ de la forme $A|x|^\alpha$ quand $x \to \infty$ et quand $x \to -\infty$.

c) Calculer la partie régulière du développement limité à l'ordre trois de $f_n(x)$ au voisinage de zéro.

2°/- a) Calculer l'intégrale $I_n(x) = \int_0^x f_n(t)\,dt$. On pourra poser $t = a\frac{e^u - e^{-u}}{2}$

b) Exprimer en fonction de I_{n+1} et I_{n-1} les intégrales

$$J_n(x) = \int_0^x \sqrt{a^2 + t^2}\, f_n(t)\,dt \quad \text{et} \quad K_n(x) = \int_0^x t\, f_n(t)\,dt$$

c) Δ est l'intérieur du triangle dont les sommets ont pour coordonnés (o,o) (o,x) (x,o), calculer l'intégrale double

$$L_n(x) = \iint_{\Delta} f_n(u+v)\, du\, dv$$

3°/ - Dans cette 3°/ partie n est un entier positif.

a) Montrer qu'on peut poser

$$f_n(x) = P_n(x) + \sqrt{a^2 + x^2}\, Q_n(x)$$

P_n et Q_n étant deux polynômes. Préciser leurs degrés et leurs parités. Calculer le coefficient de x^k dans P_n.

b) Calculer les racines de P_1, P_2, P_3 ; vérifier qu'elles sont de la forme $ia \cos \lambda \frac{\pi}{2}$, $\lambda \in Q$.

c) Calculer les racines de P_n.

d) Etablir les relations

$$P'_n(x) = n\, Q_n(x) \qquad (2)$$

$$(a^2 + x^2)\, Q'_n(x) + x\, Q_n(x) = n\, P_n(x) \qquad (3)$$

$$(a^2 + x^2)\, P''_n(x) + x\, P'_n(x) = n^2 P_n(x) \qquad (4)$$

e) En utilisant les résultats de la question 3d, donner une expression simple du coefficient de x^k dans P_n puis dans Q_n.

4°/ - On considère l'équation différentielle :

$$(a^2 + x^2)\, y'' + xy' = n^2 y \qquad (5)$$

a) Intégrer cette équation dans le cas $n = 0$.

b) Montrer que f_n est une solution de (5).

./.

c) Si la fonction φ est une solution de (5), il en est de même pour la fonction Ψ

$$\Psi(x) = \varphi(-x)$$

d) Quelle est l'intégrale générale de (5) ?

e) Montrer que, si n est entier, l'intégrale générale de (5) peut s'écrire :

$$\lambda P_n(x) + \mu \sqrt{a^2 + x^2}\, Q_n(x)$$

λ et μ étant deux constantes.

5°/ - Déterminer les séries entières dont la somme est solution de (5) Quel est le rayon de convergence de ces séries ?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail